PROCESAREA SEMNALELOR - CURS 10

SERII DE TIMP - PROCESE GAUSSIENE

Cristian Rusu

CUPRINS

- procese Gaussiene (PG)
- matrice de covarianță și matrice kernel
- operații care păstrează proprietatea psd (pozitiv semidefinită)
- regresie cu procese Gaussiene

PROCESE GAUSSIENE (PG)

- **procese stochastice**: o colecție de variabile aleatoare care poartă informație despre timp/spațiu (serii de timp aleatoare)

- PG sunt procese stochastice care au proprietatea că orice colecție finită (sau eșantionare finită) de variabile aleatoare are o **distribuție Gaussiană** (în general multivariată)

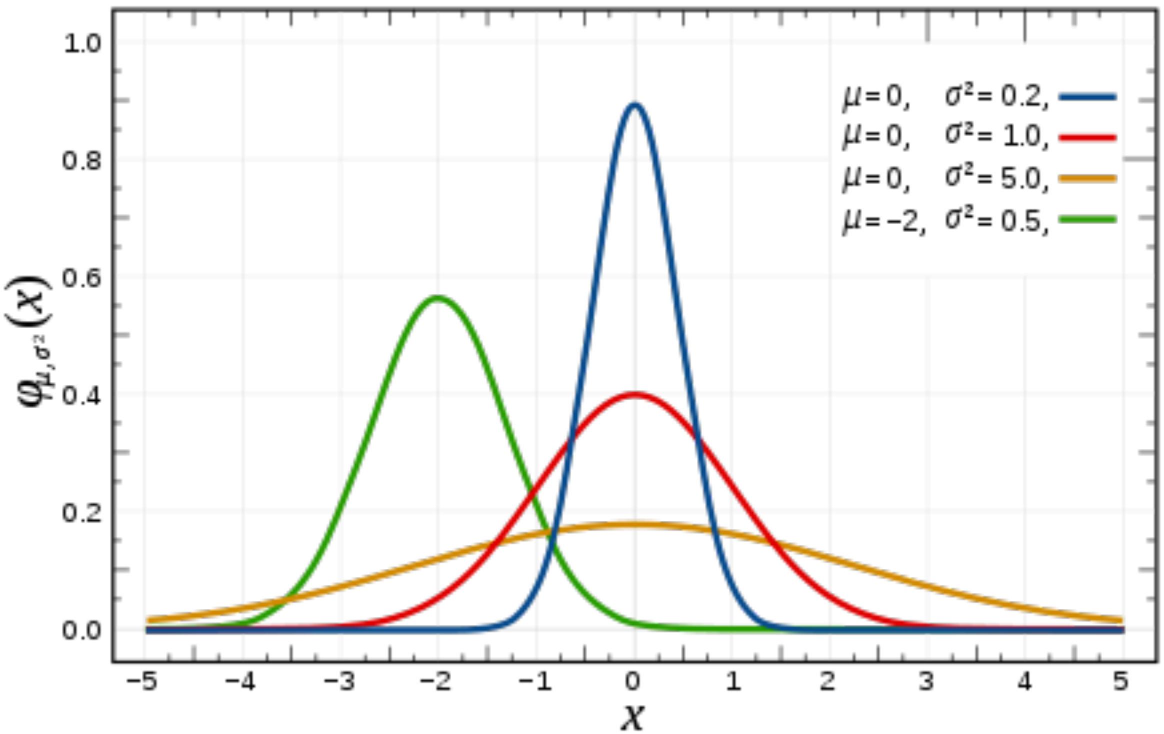
- **definiția matematică**: Pentru orice set *S*, un PG pe *S* este un set de variabile aleatoare $\{Z_t \mid t \in S\}$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ și pentru orice $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\} \in S$ avem că vectorul $\begin{bmatrix} Z_{t_1} & Z_{t_2} & \cdots & Z_{t_n} \end{bmatrix}$ este eșantionat din distribuție Gaussiană

- exemple din lumea reală:
    - mișcări aleatoare: mișcarea Browniană, drumuri aleatoare (random walks)
    - semnale audio și video
    - semnale biologice/medicale colectate (EKG, EEG, etc.)
    - cotațiile acțiunilor pe bursă

REVIEW DISTRIBUȚIA GAUSSIANĂ

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$\mathcal{N}(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right)$$

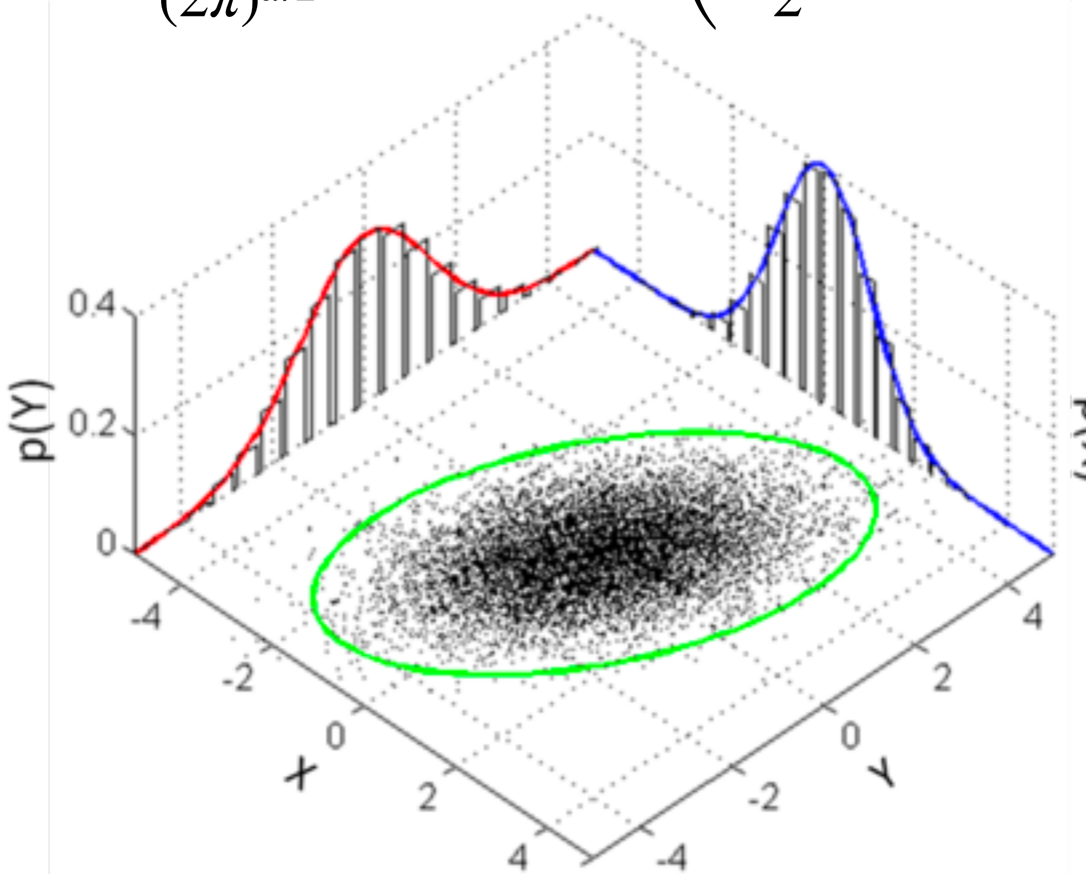


https://en.wikipedia.org/wiki/Normal_distribution

REVIEW DISTRIBUȚIA GAUSSIANĂ

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$\mathcal{N}(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)\right)$$



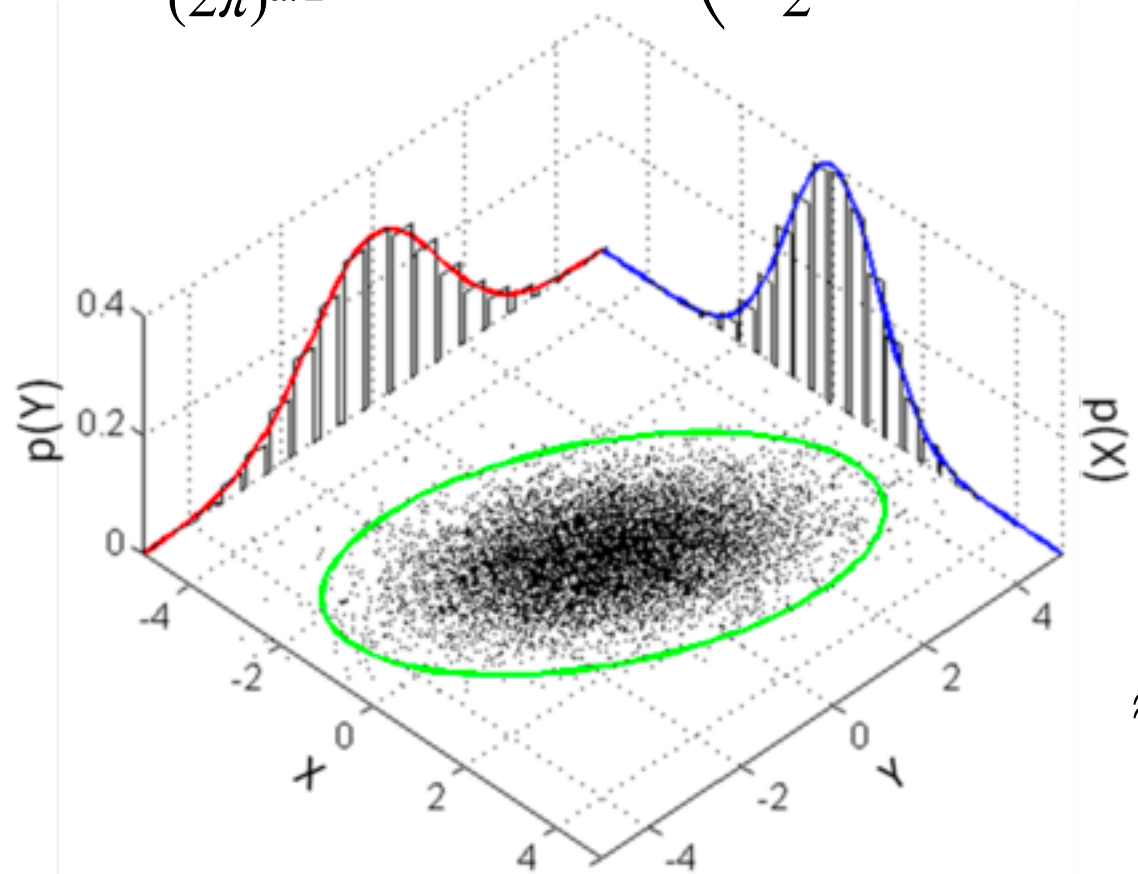
câți parametrii sunt într-o Gaussiană?

https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution

REVIEW DISTRIBUȚIA GAUSSIANĂ

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right)$$

$$\mathcal{N}(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu) \right)$$



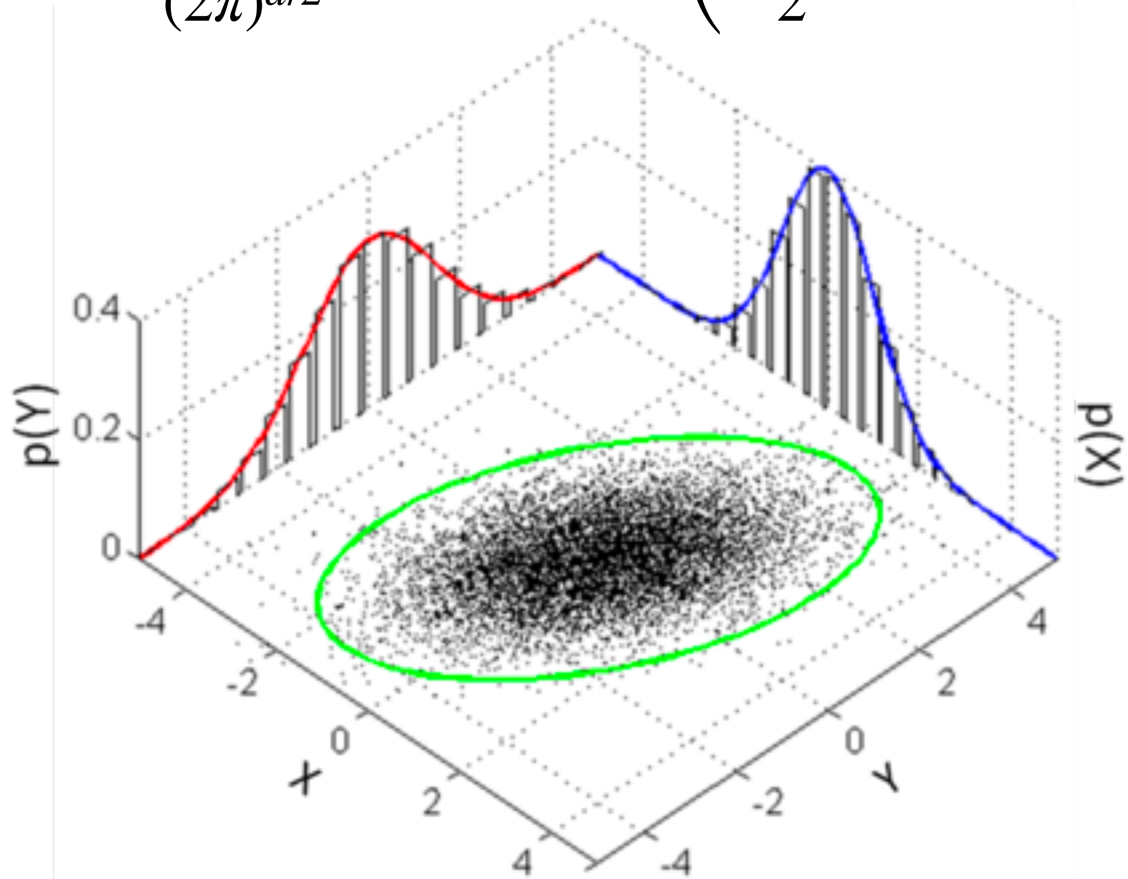
$$\approx d + d^2/2$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution

REVIEW DISTRIBUȚIA GAUSSIANĂ

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

$$\mathcal{N}(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)\right)$$

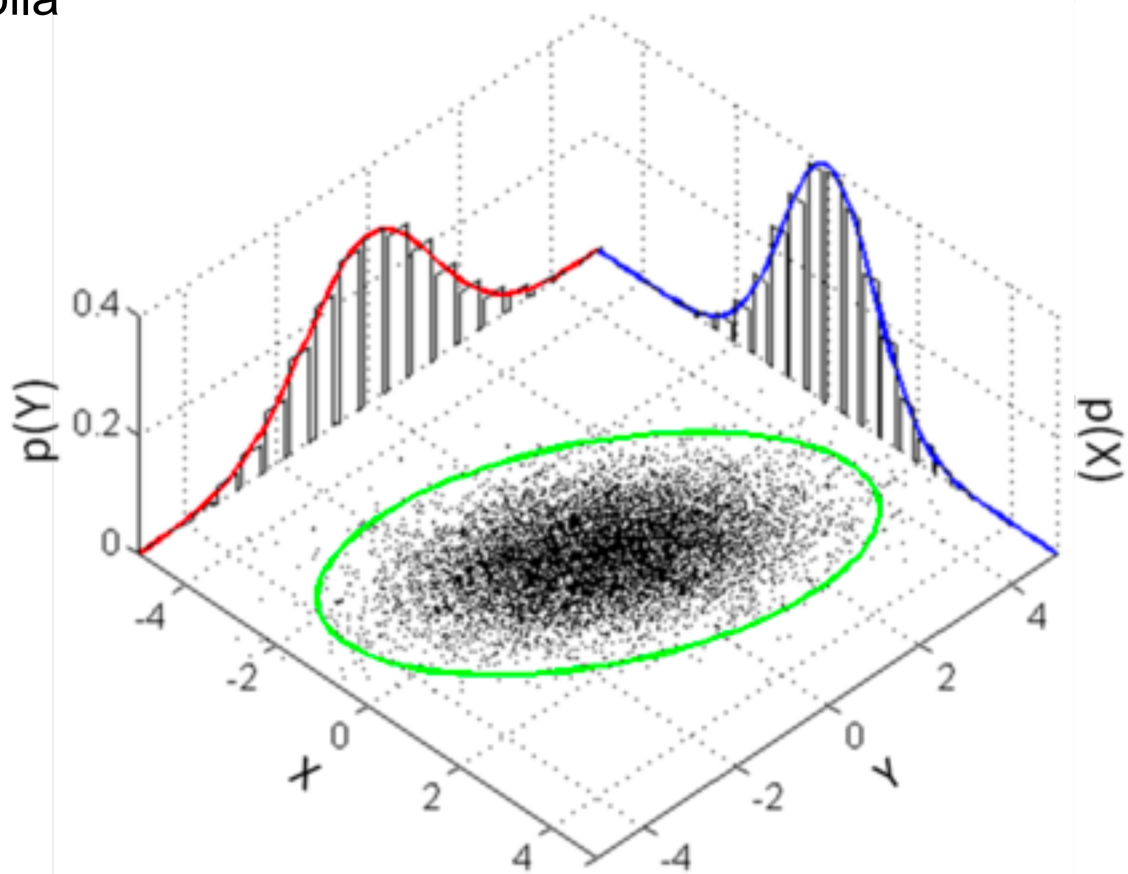


https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution

REVIEW DISTRIBUȚIA GAUSSIANĂ

$$\mathcal{N}(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)\right)$$

- Σ trebuie să fie simetrică și pozitiv definită (pd) = pozitiv semidefinita + inversabilă



https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution

REVIEW DISTRIBUȚIA GAUSSIANĂ

$$\mathcal{N}(\mu, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \det(\Sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)\right)$$

- Σ trebuie să fie simetrică și pozitiv definită (pd) = pozitiv semidefinita + inversabilă
  - toate valorile proprii sunt pozitive
  - $\mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x}$
  - toți determinanții principali sunt pozitivi
  - matricea are structura $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$
  - …

https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution

REVIEW DISTRIBUȚIA GAUSSIANĂ

- vi se dă $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, cum eșantionați din această distribuție?

.

REVIEW DISTRIBUȚIA GAUSSIANĂ

- vi se dă $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, cum eșantionați din această distribuție?

  - pasul 1: $\Sigma = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^T$ (descompunerea valorilor proprii)
  - pasul 2: $\mathbf{x} = \mathbf{U}\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{n} + \mu, \ \mathbf{n} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$

  - deci $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$

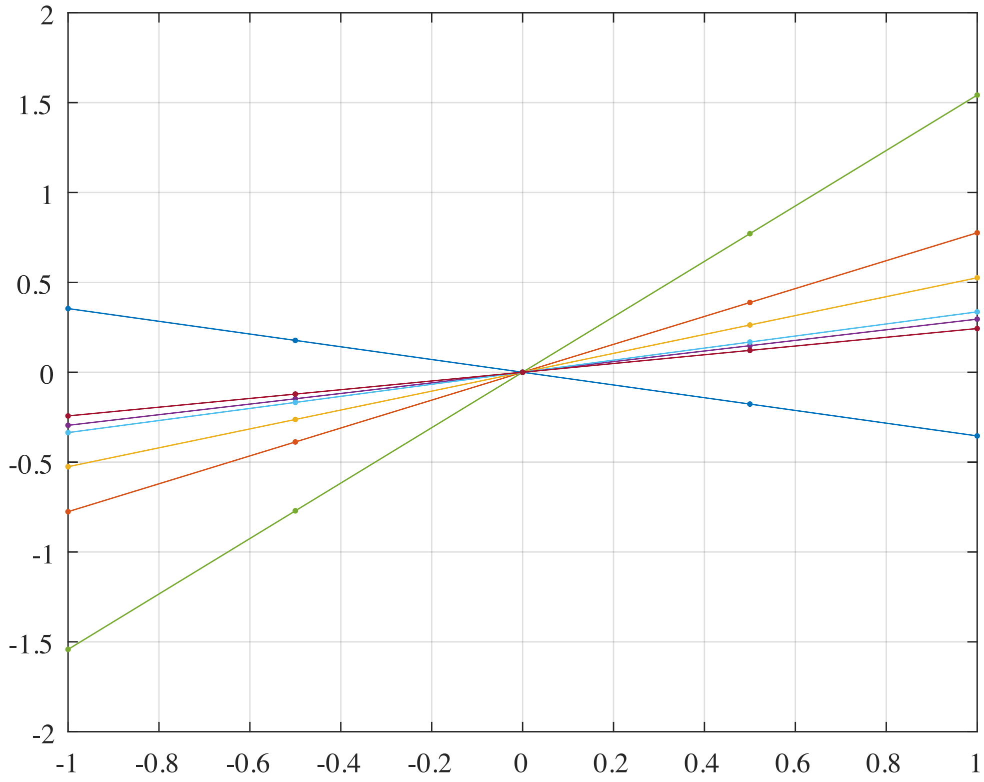
PROCESE GAUSSIENE (PG)

- primul exemplu: linii generate aleator
  - linii care trec prin origine
  - $S \equiv \mathbb{R},\ z_t = tw,\ w \sim \mathcal{N}(0,1)$
- de ce este PG?
  - $$\begin{bmatrix} z_{t_1} \\ z_{t_2} \\ \vdots \\ z_{t_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 w \\ t_2 w \\ \vdots \\ t_n w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} w = \mathbf{a} w$$
  - o combinație liniară de variabile Gaussiene este o Gaussiană

PROCESE GAUSSIENE (PG)

- primul exemplu: linii generate aleator
    - linii care trec prin origine
    - $S \equiv \mathbb{R},\ z_t = tw,\ w \sim \mathcal{N}(0,1)$

- cum arată grafic acest PG?



.

PROCESE GAUSSIENE (PG)

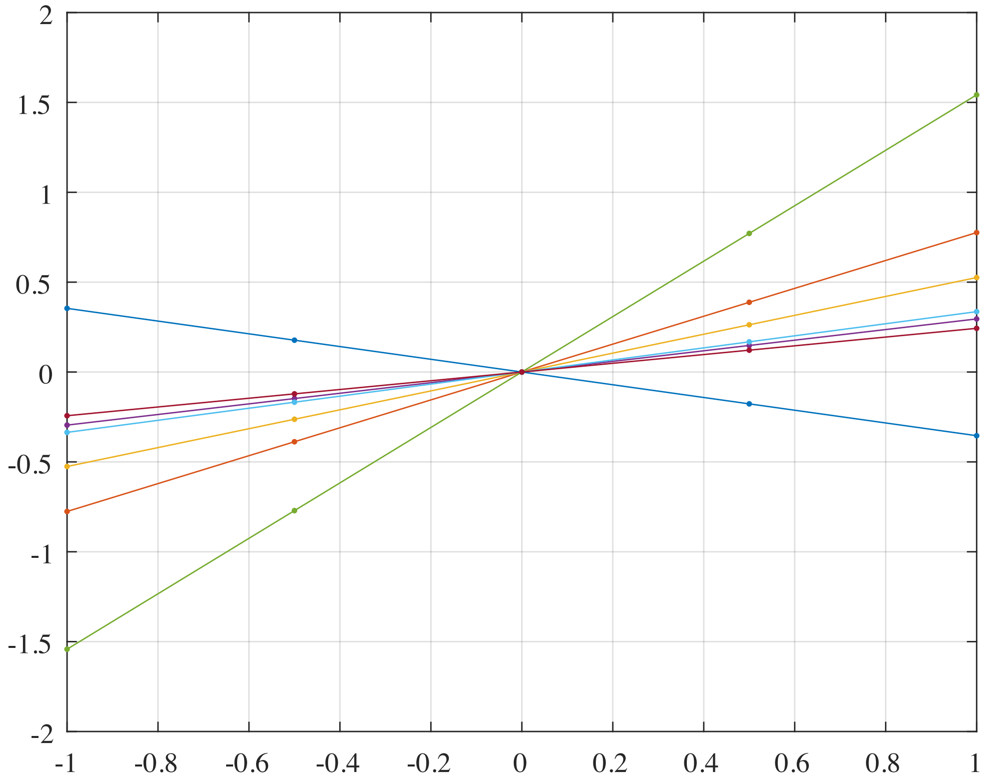
- matrice de covarianță, exemple:
    - liniar: $S = \mathbb{R}^d,\ \mu(x) = 0,\ k(x, y) = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$
    - mișcare Browniană: $S = [0,\infty],\ \mu(t) = 0,\ k(s, t) = \min\{s, t\}$
    - exponențiala pătrată:
      $S = \mathbb{R}^d,\ \mu(x) = 0,\ k(x, y) = \exp(-\alpha\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2),\ \alpha > 0$
    - Ornstein-Uhlenbeck:
      $S = [0,\infty],\ \mu(t) = 0,\ k(s, t) = \exp(-\alpha\,|\,s - t\,|\,), \alpha > 0$
    - periodic:
      $S = \mathbb{R},\ \mu(x) = 0,\ k(x, y) = \exp(-\alpha \sin^2(\beta\pi(x - y))), \alpha, \beta > 0$
    - simetric:
      $S = \mathbb{R},\ \mu(x) = 0,\ k(x, y) = \exp(-\alpha(\min\{\,|x - y\,|, |\,x + y\,|\,\})^2),$

PROCESE GAUSSIENE (PG)

- exemplu de eșantionare prin PG
  - alegem covarianța, e.g., liniar: $S = \mathbb{R}^d,\ \mu(x) = 0,\ k(x, y) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$
  - stabilim intervalul de lucru, e.g., $x, y \in [-1,1]$
  - calculăm matricea de covarianță $c_{ij} = k(x_i, y_j)$
  - eșantionăm cu din Gaussiana cu matricea de covarianță C și medie 0 ca să obținem vectorul z
  - afișăm pentru $x \in [-1,1]$ valorile din z

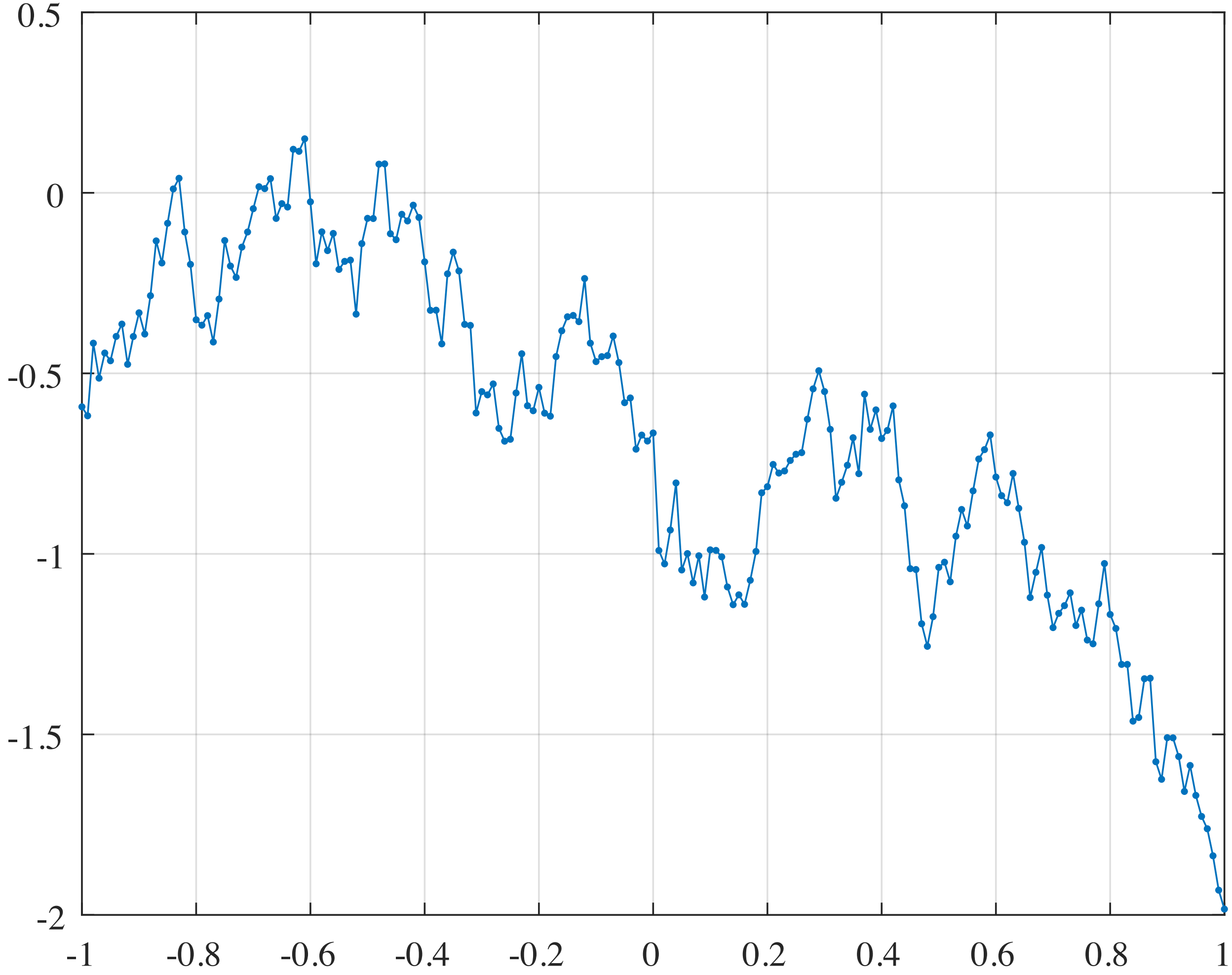
PROCESE GAUSSIENE (PG)

- liniar: $S = \mathbb{R}^d$, $\mu(x) = 0$, $k(x, y) = \mathbf{x}^T \mathbf{y}$



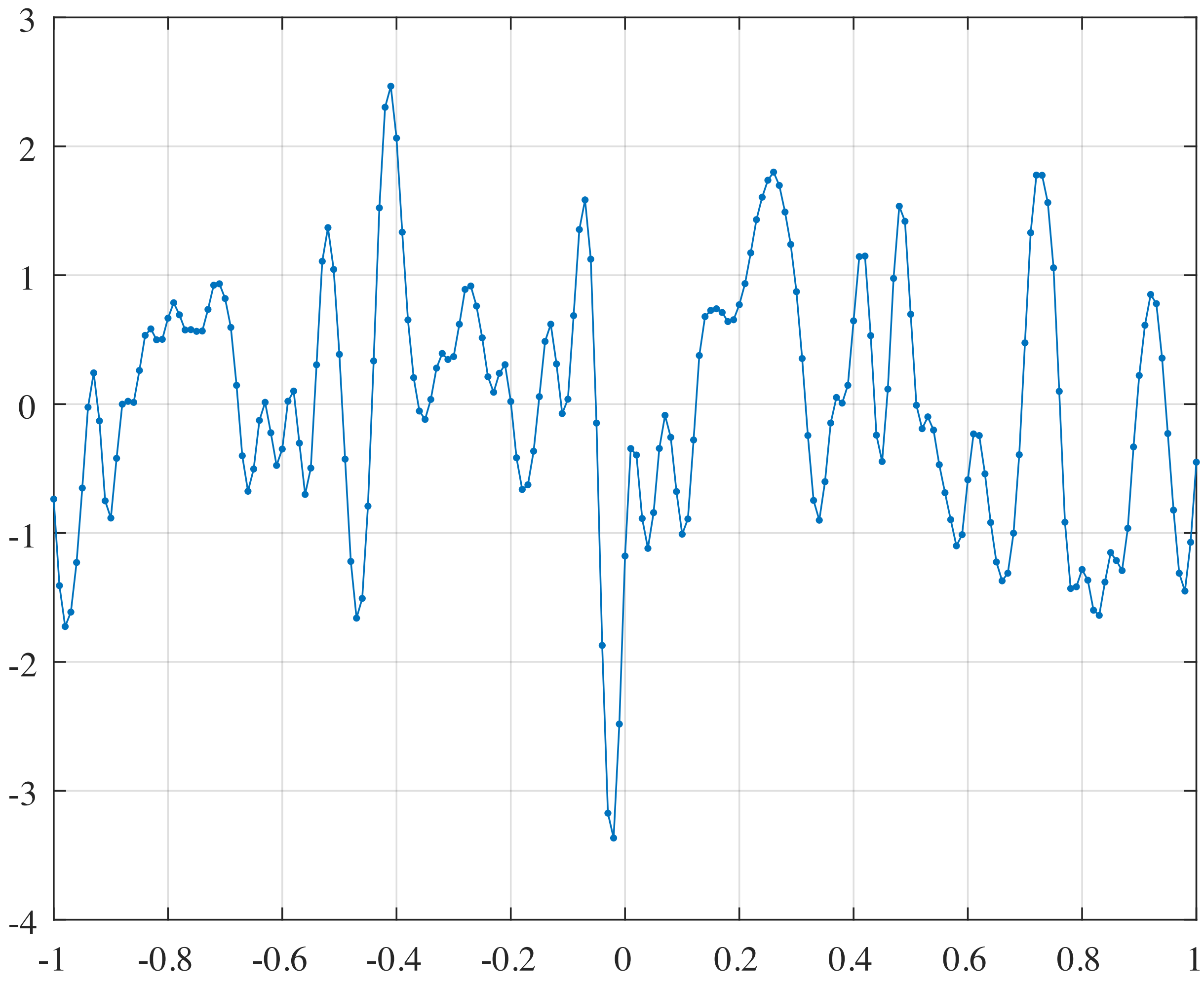
PROCESE GAUSSIENE (PG)

- mișcare Browniană: $S = [0,\infty]$, $\mu(t) = 0$, $k(s,t) = \min\{s,t\}$



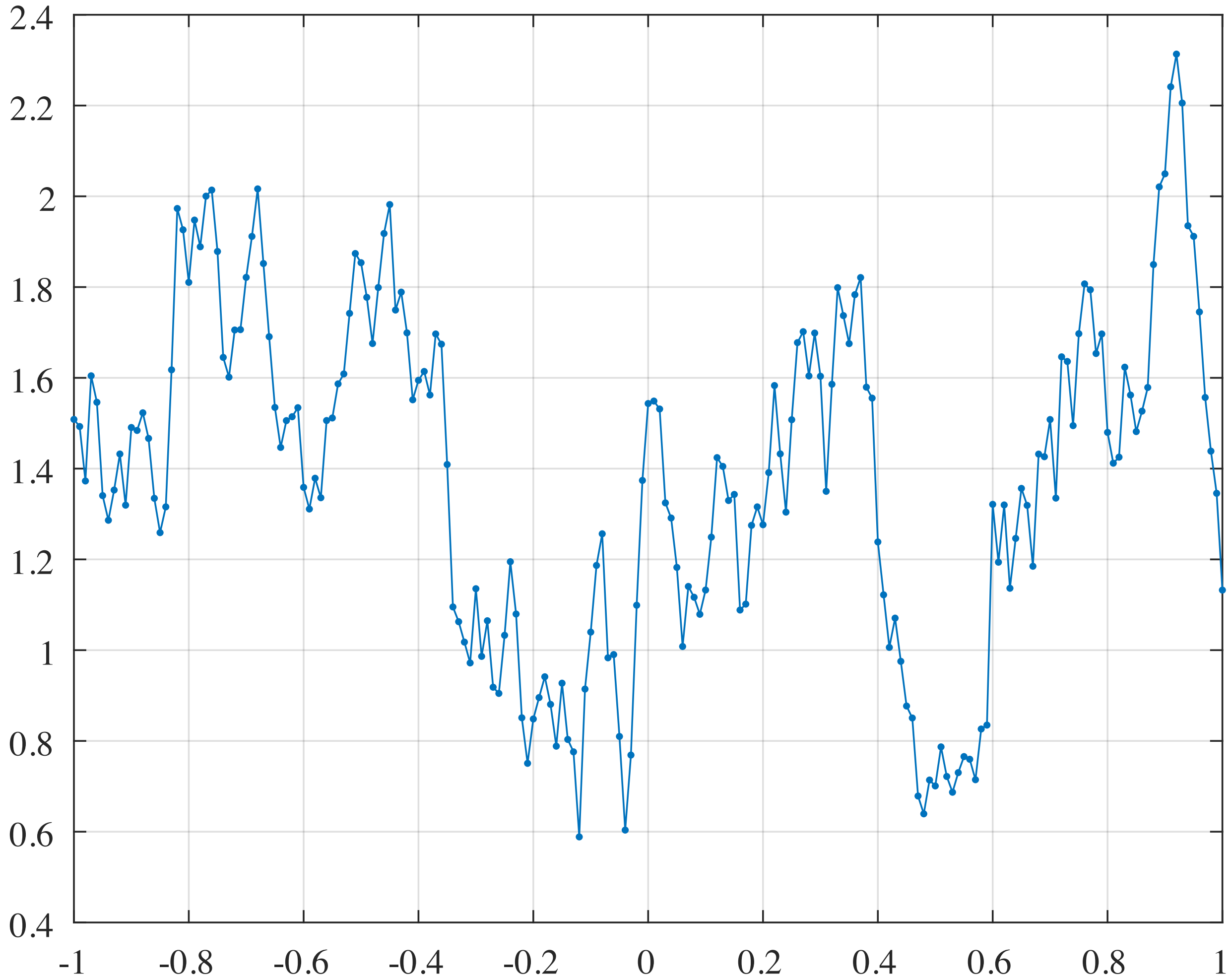
PROCESE GAUSSIENE (PG)

- exponențiala pătrată:
  $S = \mathbb{R}^d$, $\mu(x) = 0$, $k(x, y) = \exp(-\alpha\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2)$, $\alpha > 0$



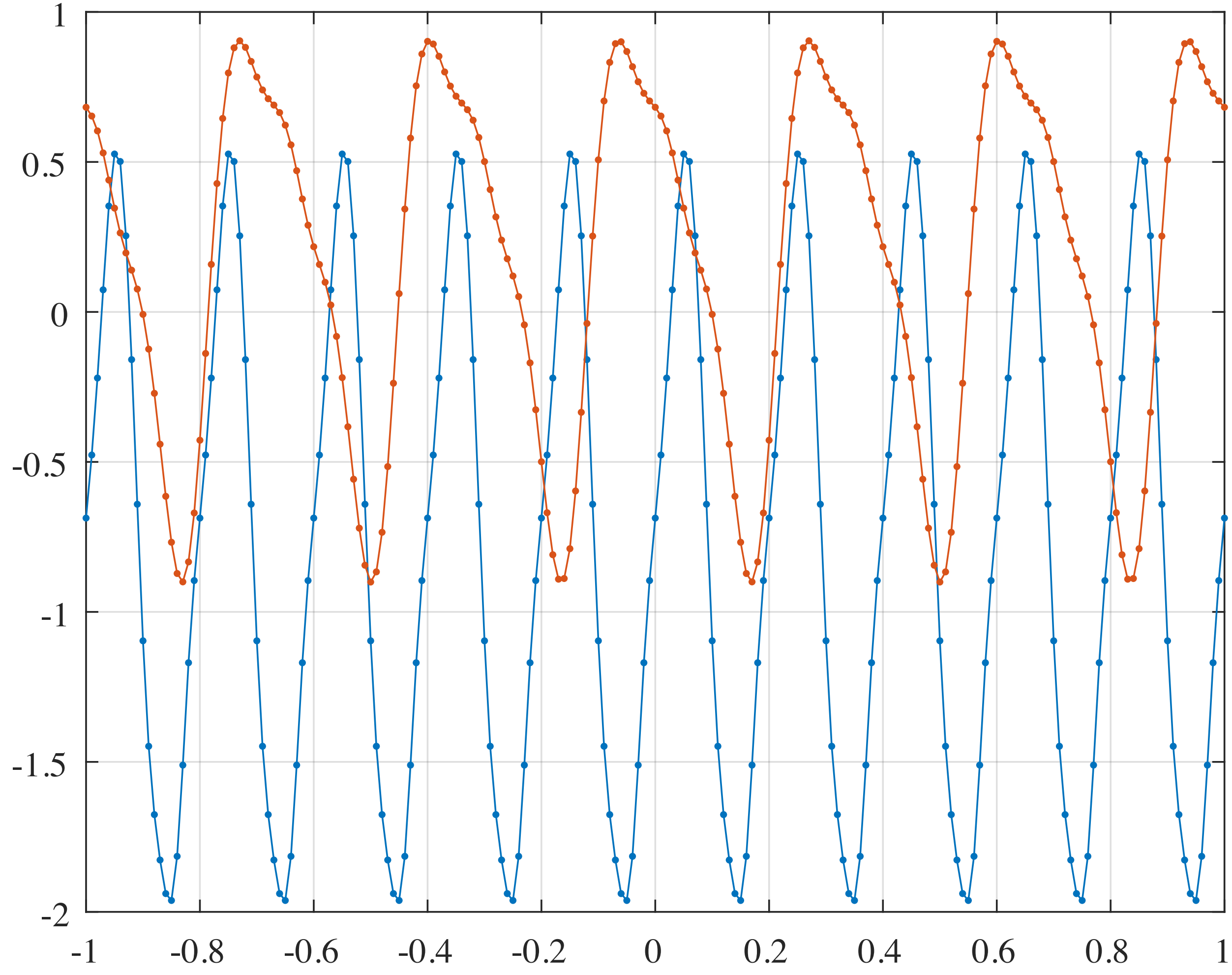
PROCESE GAUSSIENE (PG)

- Ornstein-Uhlenbeck:
  $S = [0,\infty],\ \mu(t) = 0,\ k(s,t) = \exp(-\alpha\,|\,s - t\,|\,), \alpha > 0$



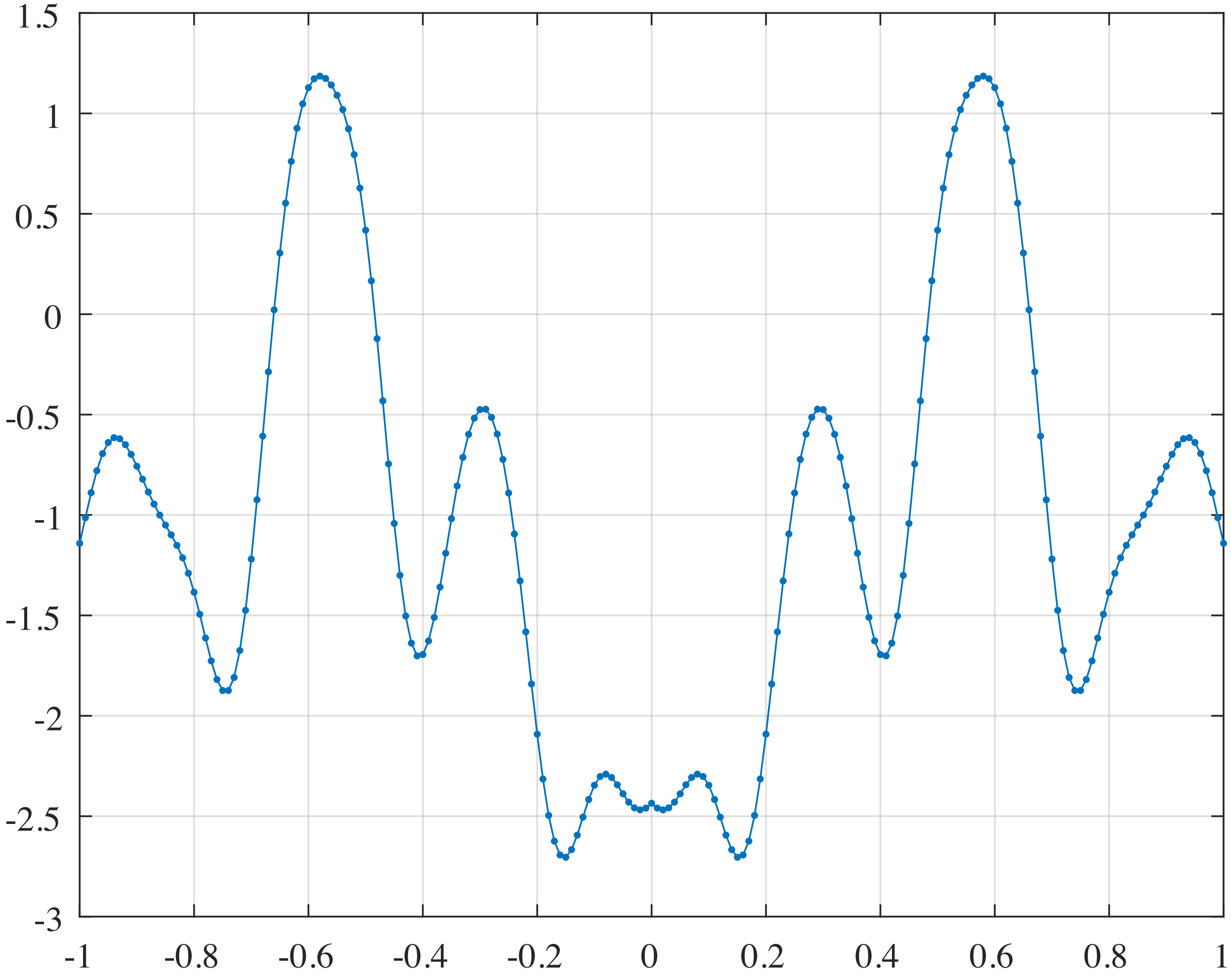
PROCESE GAUSSIENE (PG)

- periodic:
  $S = \mathbb{R},\ \mu(x) = 0,\ k(x, y) = \exp(-\alpha \sin^2(\beta\pi(x - y))), \alpha, \beta > 0$



PROCESE GAUSSIENE (PG)

- simetric:
  $S = \mathbb{R},\ \mu(x) = 0,\ k(x, y) = \exp(-\alpha(\min\{\,|x - y|, |x + y|\,\})^2), \alpha > 0$



PROCESE GAUSSIENE (PG)

- operații care păstrează proprietatea de pozitivitate (positive definite)
  1. $\alpha k(x, y), \alpha \geq 0$
  2. $k_1(x, y) + k_2(x, y)$
  3. $k_1(x, y) \times k_2(x, y)$
  4. $p(k(x, y))$, pentru orice polinom pozitiv
  5. $\exp(k(x, y))$
  6. $f(x)k(x, y)\overline{f(y)}$, pentru orice funcție

- care din operațiile de mai sus par mai “nenaturale”?

PROCESE GAUSSIENE (PG)

- operații care păstrează proprietatea de pozitivitate (positive definite)

  1. $\alpha k(x, y), \alpha \geq 0$
  2. $k_1(x, y) + k_2(x, y)$
  3. $k_1(x, y) \times k_2(x, y)$
  4. $p(k(x, y))$, pentru orice polinom pozitiv
  5. $\exp(k(x, y))$
  6. $f(x)k(x, y)\overline{f(y)}$, pentru orice funcție

- care din operațiile de mai sus par mai “nenaturale”?
  - pentru că e înmulțirea element cu element între două matrice
  - se numește produsul Hadamard

PROCESE GAUSSIENE (PG)

- una dintre operațiile care păstrează proprietatea de pozitivitate (positive definite): $k_1(x, y) + k_2(x, y)$

- demonstrație:
    - covarianța pentru k_1 este $C = (c_{ij}) = k_1(x_i, x_j), C = A^T A$
    - covarianța pentru k_2 este $D = (d_{ij}) = k_2(x_i, x_j), D = B^T B$
    - produsul este: $E = C \odot D = (e_{ij}) = (c_{ij} d_{ij})$
        - E este simetric, e clar
        - dar este E pozitiv definit?

PROCESE GAUSSIENE (PG)

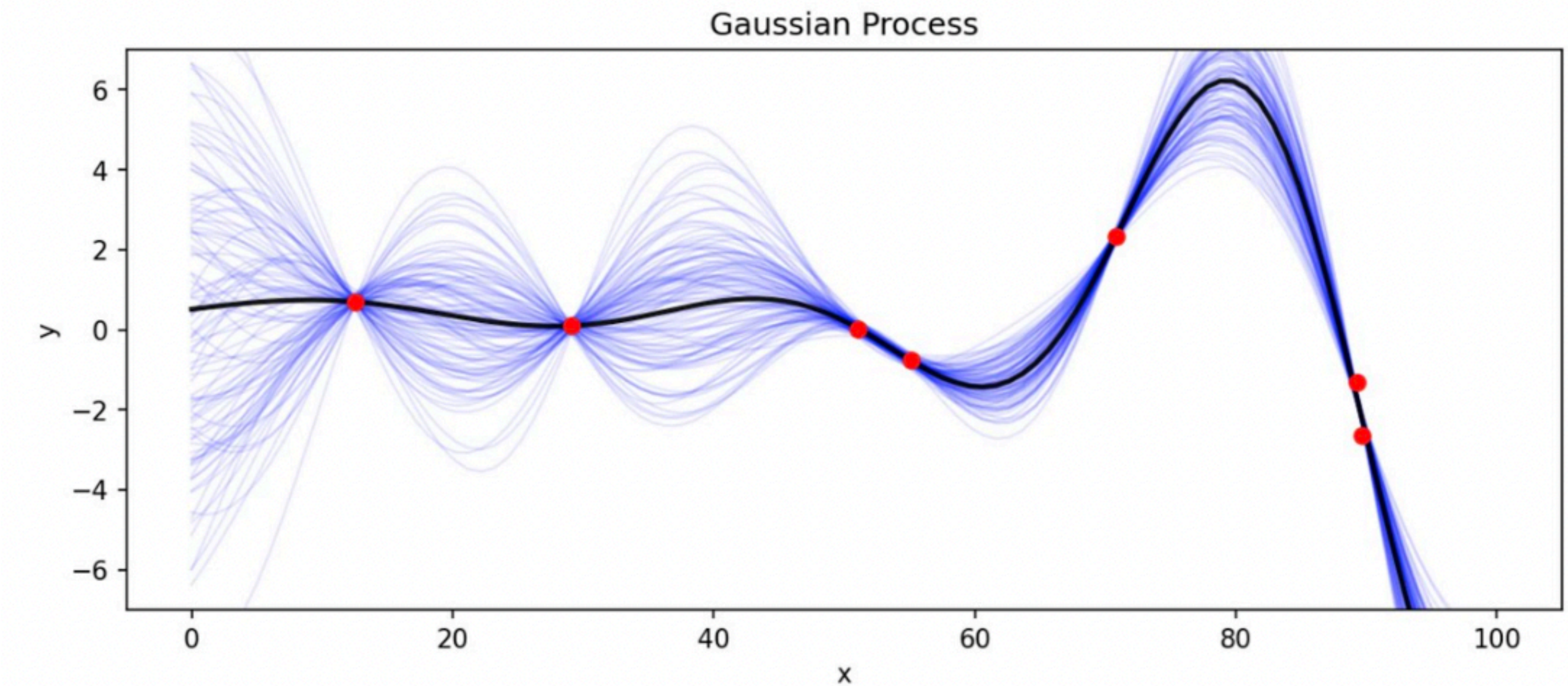
- una dintre operațiile care păstrează proprietatea de pozitivitate (positive definite): $k_1(x, y) + k_2(x, y)$

- demonstrație:
  - covarianța pentru k_1 este $C = (c_{ij}) = k_1(x_i, x_j), C = A^T A$
  - covarianța pentru k_2 este $D = (d_{ij}) = k_2(x_i, x_j), D = B^T B$
  - produsul este: $E = C \odot D = (e_{ij}) = (c_{ij} d_{ij})$
    - E este simetric, e clar
    - dar este E pozitiv definit?

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}^T \mathbf{E} \mathbf{u} &= \sum_{i,j} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j c_{ij} d_{ij} \\
&= \sum_{i,j} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j (\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j^T)(\mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_j) \\
&= \sum_{k,\ell} \left(\sum_i \mathbf{u}_i \mathbf{a}_{ik} \mathbf{b}_{i\ell} \right) \left(\sum_j \mathbf{u}_j \mathbf{a}_{jk} \mathbf{b}_{j\ell} \right) \\
&= \sum_{k,\ell} \left(\sum_i \mathbf{u}_i \mathbf{a}_{ik} \mathbf{b}_{i\ell} \right)^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

REGRESIE CU PROCESE GAUSSIENE (RPG)

- ni se dă un set de date
  - $\mathscr{D} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}, x_i \in \mathbb{R}^d, y_i \in \mathbb{R}$
- definim variabilele aleatoare: $Y_1, \ldots, Y_n, Y_i = Z_{x_i} + \epsilon_i$
- și impunem structura $Z_x = \mathbf{x}^T\mathbf{w}$ să fie un PG pe $S \equiv \mathbb{R}^d$



REGRESIE CU PROCESE GAUSSIENE (RPG)

- $Z \in \mathbb{R}^n, Z \sim \mathcal{N}(\mu, K), \epsilon \in \mathbb{R}^n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I})$
- cele două Gaussiene sunt independente

- $Y = Z + \epsilon, Y \sim \mathcal{N}(\mu, K + \sigma^2 \mathbf{I}) = \mathcal{N}(\mu, C)$

- din această Gaussiană, observăm unele elemente iar altele trebuie prezise

- considerăm că datele sunt partiționate în două seturi: ce observăm și ce vrem să prezicem
  - vrem să prezicem pentru setul $\mathscr{A} = \{1, \ldots, \ell\}$
  - avem la dispoziție setul $\mathscr{B} = \{\ell + 1, \ldots, n\}$
  - variabilele aleatoare sunt partiționate: $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{\mathscr{A}} \\ Y_{\mathscr{B}} \end{bmatrix}$
  - media și matricea de covarianță sunt partiționate:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_{\mathscr{A}} \\ \mu_{\mathscr{B}} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} C_{\mathscr{A}\mathscr{A}} & C_{\mathscr{A}\mathscr{B}} \\ C_{\mathscr{B}\mathscr{A}} & C_{\mathscr{B}\mathscr{B}} \end{bmatrix}$$

REGRESIE CU PROCESE GAUSSIENE (RPG)

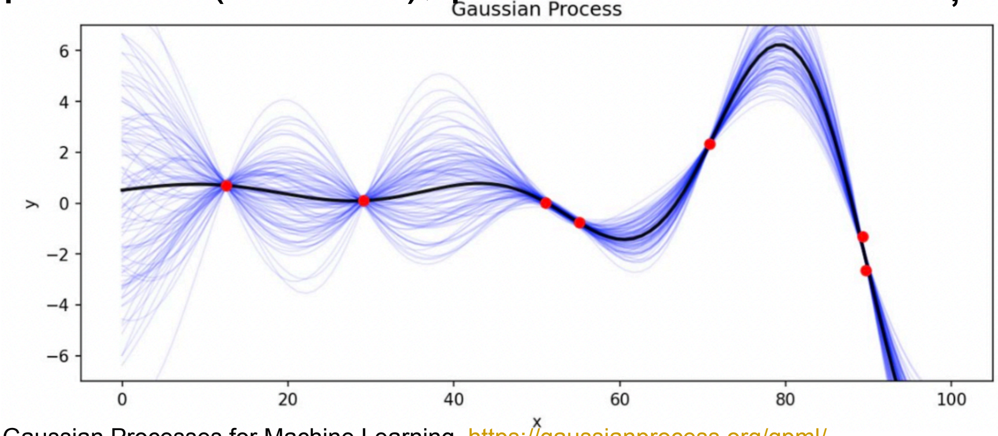
- ideea de bază: o Gaussiană condiționată de o altă Gaussiană este din nou o Gaussiană

- pdf$(Y_{\mathscr{A}} \,|\, Y_{\mathscr{B}} = y_{\mathscr{B}}) = \mathscr{N}(m, D)$

    - $m = \mu_a + C_{\mathscr{A}\mathscr{B}} C^{-1}_{\mathscr{B}\mathscr{B}} (y_{\mathscr{B}} - \mu_{\mathscr{B}})$
    - $D = C_{\mathscr{A}\mathscr{A}} - C_{\mathscr{A}\mathscr{B}} C^{-1}_{\mathscr{B}\mathscr{B}} C_{\mathscr{B}\mathscr{A}}$

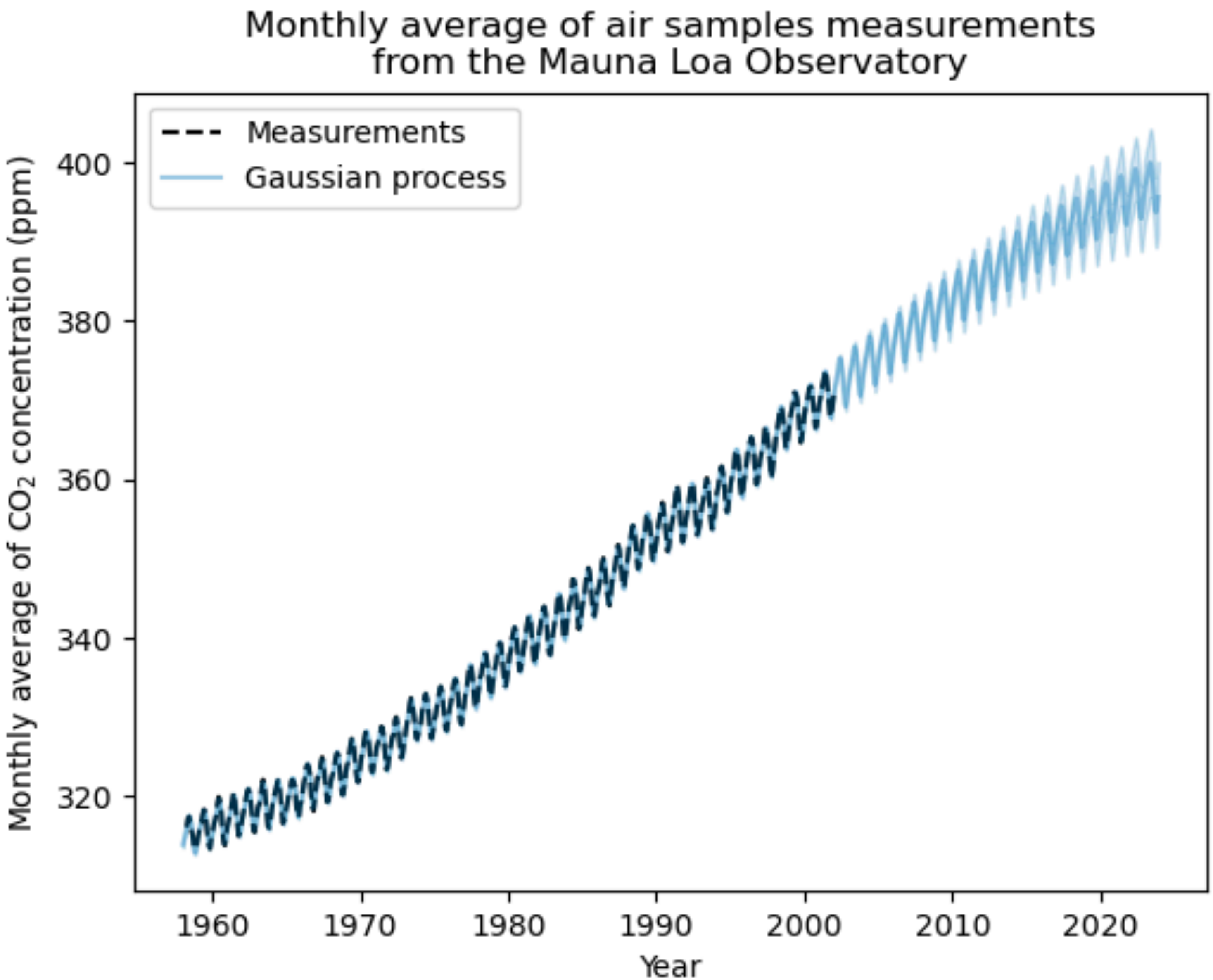
- modelul nostru: $Y_i = Z_{x_i} + \epsilon_i$

- unde avem punctele (setul $\mathscr{B}$), pe restul intervalului eșantionăm



C. E. Rasmussen and C. K. I. Williams, Gaussian Processes for Machine Learning, https://gaussianprocess.org/gpml/

REGRESIE CU PROCESE GAUSSIENE (RPG)



https://scikit-learn.org/stable/auto_examples/gaussian_process/plot_gpr_co2.html

DATA VIITOARE

- prezentări de proiecte